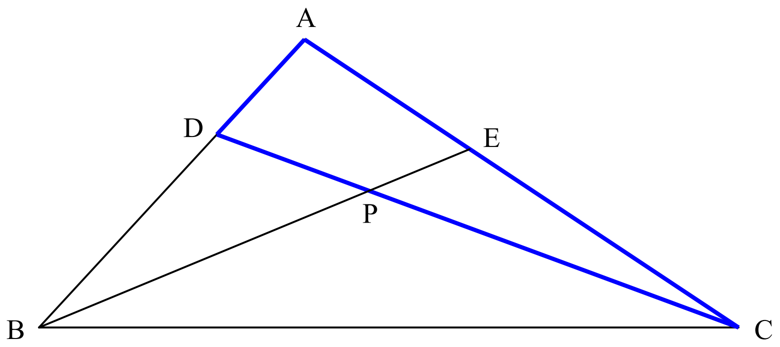
平面のベクトル

例題 1　内分点，交点（１）

別解：メネラウスの定理の利用



三角形 ADC と線分 BE 上の 3 点 B，P，E について，P は BE と DC の交点だから，

メネラウスの定理より，$\dfrac{BD}{AB}\cdot\dfrac{PC}{DP}\cdot\dfrac{EA}{CE}=1$

これと $\dfrac{BD}{AB}\cdot\dfrac{PC}{DP}\cdot\dfrac{EA}{CE}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{PC}{DP}\cdot\dfrac{3}{5}=\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{PC}{DP}$ より，$\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{PC}{DP}=1$　$\therefore\dfrac{PC}{DP}=\dfrac{5}{2}$

よって，点 P は線分 DC を 2 : 5 に内分する。

ゆえに，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP}&=\frac{5}{7}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{7}\overrightarrow{AC}\\&=\frac{5}{7}\cdot\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right)+\frac{2}{7}\overrightarrow{AC}\\&=\frac{5}{21}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{7}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

例題 2　内分点，交点（２）

解答補足

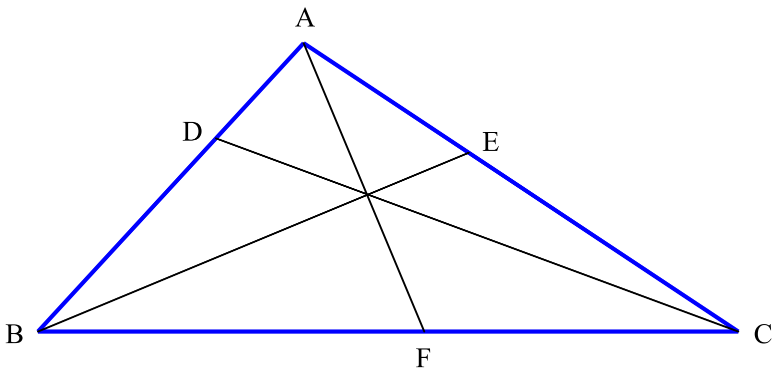
$$\overrightarrow{AP}=\frac{5}{21}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{7}\overrightarrow{AC}$$
$$=\frac{1}{21}\left(5\overrightarrow{AB}+6\overrightarrow{AC}\right)$$
$$=\frac{11}{21}\left(\frac{5}{11}\overrightarrow{AB}+\frac{6}{11}\overrightarrow{AC}\right)$$

より，

$$\overrightarrow{AF}=\frac{5}{11}\overrightarrow{AB}+\frac{6}{11}\overrightarrow{AC}$$

よって，BF：FC＝6：5

別解：チェバの定理の利用



三角形 ABC と 3 点 D，E，F について，BE，CD，AF は点 P で交わるから，

チェバの定理より，$\frac{DB}{AD}\cdot\frac{FC}{BF}\cdot\frac{EA}{CE}=1$

これと $\frac{DB}{AD}\cdot\frac{FC}{BF}\cdot\frac{EA}{CE}=\frac{2}{1}\cdot\frac{FC}{BF}\cdot\frac{3}{5}$ より，$\frac{6}{5}\cdot\frac{FC}{BF}=1$　$\therefore\frac{FC}{BF}=\frac{5}{6}$

よって，点 F は線分 BC を 6：5 に内分する。

ゆえに，$\overrightarrow{AF}=\frac{5}{11}\overrightarrow{AB}+\frac{6}{11}\overrightarrow{AC}$

補足

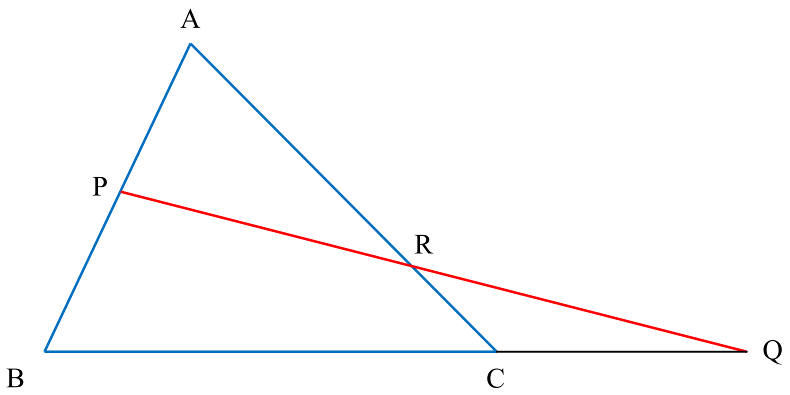
メネラウスの定理とチェバの定理をまとめて覚える方法

三角形 ABC の辺を AB，BC，CA と表し，
それぞれの辺の内分点・外分点を P，Q，R とすると，
比の取り方は下表となる。

辺	内分点・外分点	比の取り方
AB	**P**	**AP/PB**
BC	**Q**	**BQ/QC**
CA	**R**	**CR/RA**

すると，メネラウスの定理の式とチェバの定理の式は，$\dfrac{\mathbf{AP}}{\mathbf{PB}}\times\dfrac{\mathbf{BQ}}{\mathbf{QC}}\times\dfrac{\mathbf{CR}}{\mathbf{RA}}=1$ と統一できる。

後は，
外分点の数が偶数のときは，「チェバの定理より～」
外分点の数が奇数のときは，「メネラウスの定理より～」
とすればよい。



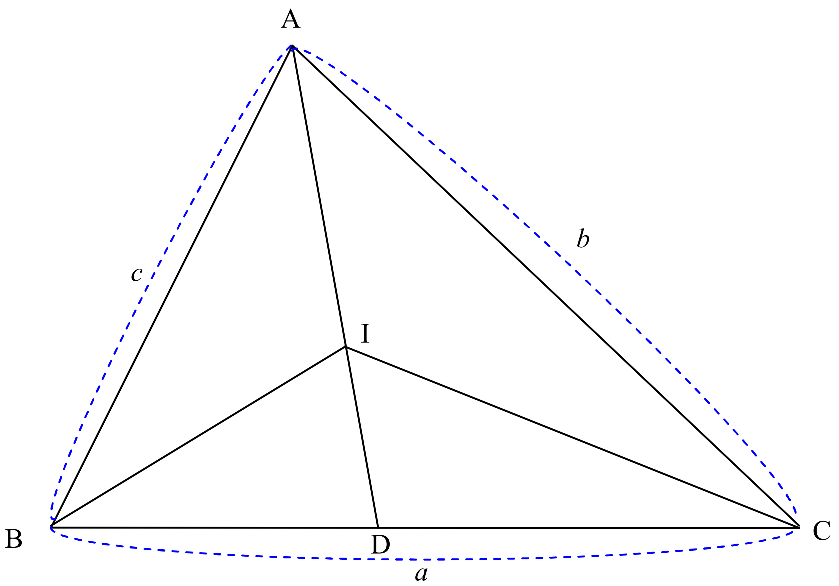
例題 4　内心

補足

三角形の内心のベクトルの求め方を 3 つ

三角形 ABC の内心を I，辺 BC,CA,AB の長さを a,b,c とする。

求め方 1：内角の 2 等分線の性質を利用



直線 AI と辺 BC の交点を D とすると，AI は∠BAC の二等分線だから，

BD：DC＝AB：AC＝c：b

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{b}{b+c}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{c}{b+c}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，BD＝$\dfrac{ca}{b+c}$

BI は∠ABC の二等分線だから，AI：ID＝BA：BD

これと BD＝$\dfrac{ca}{b+c}$ より，AI：ID＝c：$\dfrac{ca}{b+c}$＝$b+c$ ：a

よって，AI＝$\dfrac{b+c}{a+b+c}$AD　$\therefore \overrightarrow{\mathrm{AI}}=\dfrac{b+c}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

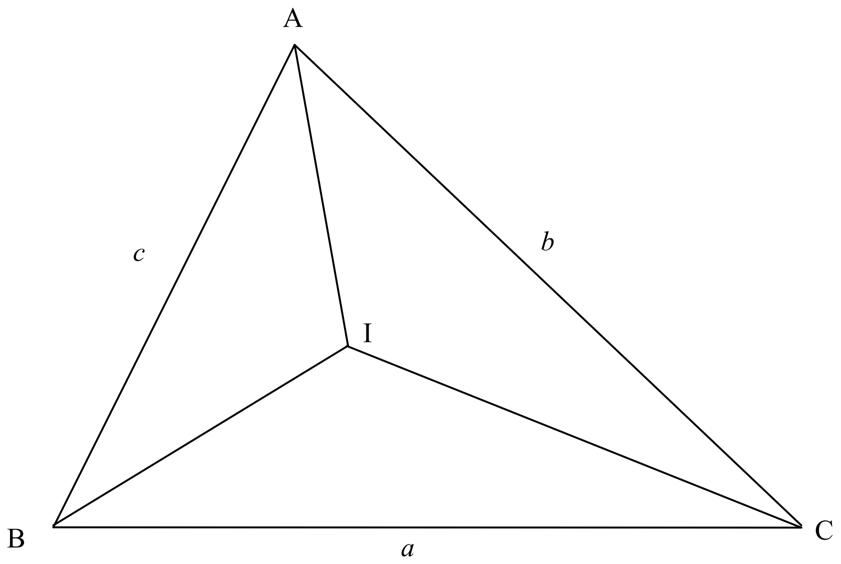
これと $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{b}{b+c}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{c}{b+c}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

補足

A,B,C とは異なる点 O を定点にとると，$\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\dfrac{a}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

求め方 **2**：**2** 等分線を単位ベクトルを用いて表すことを利用



$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の単位ベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{AB'}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の単位ベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{AC'}}$ とすると，

$\overrightarrow{\mathrm{AB'}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{b}$

∠BAC の二等分線は線分 B'C'の中点 M を通るから，

∠BAC の二等分線のベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ は正の実数 k を用いて，

$\overrightarrow{\mathrm{AI}} = 2k\overrightarrow{\mathrm{AM}} = k\left(\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{c} + \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{b}\right)$ と表せる。　$\therefore \overrightarrow{\mathrm{AI}} = \dfrac{k}{c}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{k}{b}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　・・・①

同様にして，$\overrightarrow{\mathrm{BI}} = l\left(\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}}{c} + \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{a}\right)$（$l$ は正の実数）より，

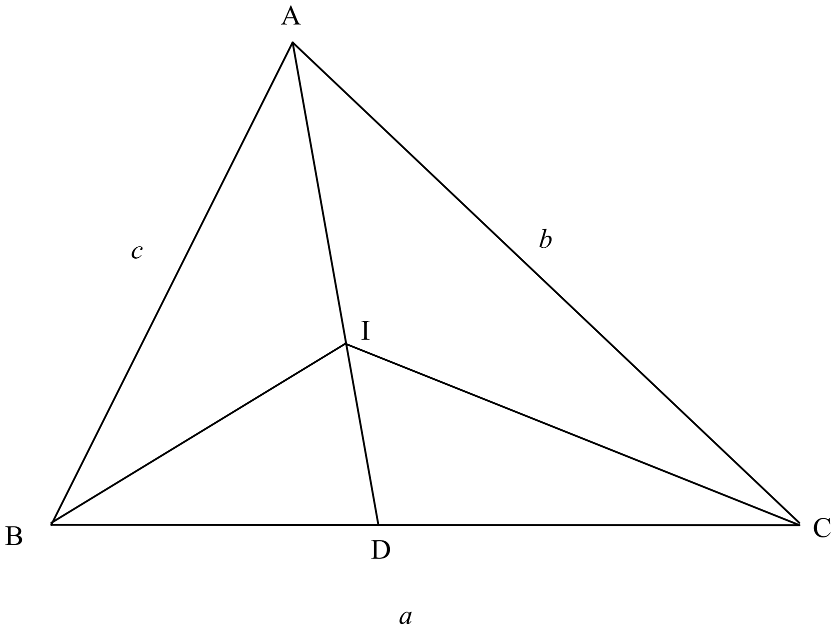
$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AI}} &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BI}} \\
&= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + l\left(-\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{c} + \frac{\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{a}\right) \\
&= \left(1 - \frac{l}{c}\right)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{l}{a}\overrightarrow{\mathrm{BC}} \\
&= \left(1 - \frac{l}{c}\right)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{l}{a}\left(\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) \\
&= \left(1 - \frac{l}{a} - \frac{l}{c}\right)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{l}{a}\overrightarrow{\mathrm{AC}} \quad \cdots ②
\end{aligned}
$$

①，②より，$\begin{cases} \dfrac{k}{c} = 1 - \dfrac{l}{a} - \dfrac{l}{c} \\ \dfrac{k}{b} = \dfrac{l}{a} \end{cases}$　$\therefore k = \dfrac{bc}{a+b+c}$

これを①に代入すると，

$\overrightarrow{\mathrm{AI}} = \dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

求め方 3：面積比を利用



内接円の半径を r とすると，△IBC：△ICA：△IAB＝$\dfrac{ar}{2}$ ： $\dfrac{br}{2}$ ： $\dfrac{cr}{2}$ ＝a：b：c

$\therefore$ △ABC：△IBC＝$a+b+c$ ：a

ここで，辺 BC を共通底辺とすると，△ABC：△IBC＝AD：ID

よって，AD：ID＝$a+b+c$ ：a　$\therefore$ AD：AI＝$a+b+c$ ： $b+c$　$\therefore \overrightarrow{\mathrm{AI}} = \dfrac{b+c}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

これと $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \dfrac{b}{b+c}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{c}{b+c}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より，

$\overrightarrow{\mathrm{AI}} = \dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

5　領域の表現

別解：成分表示ベクトルから解く

(1)

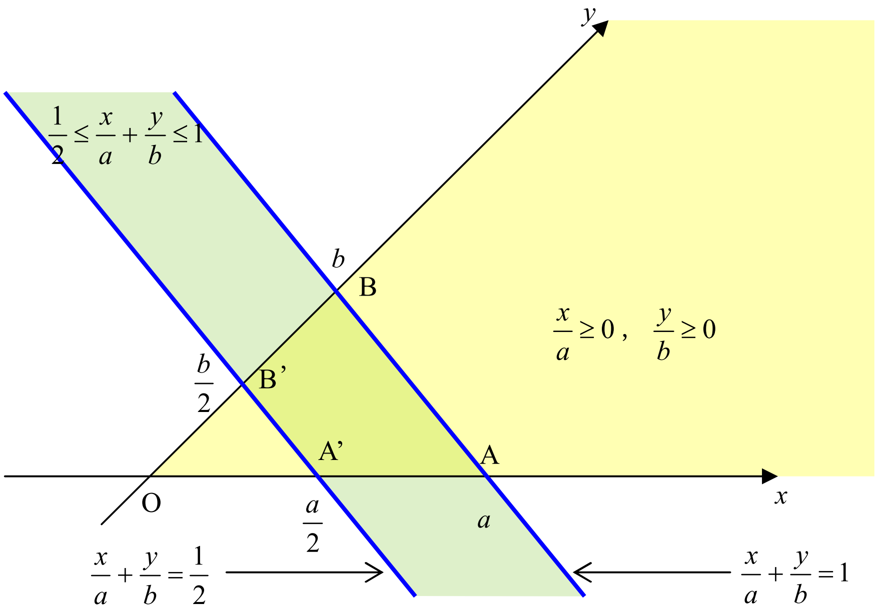
直線 OA を x 軸，直線 OB を y 軸，O を原点，$\mathrm{A}(a,0)$，$\mathrm{B}(0,b)$，$\mathrm{P}(x,y)$とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$=s\cdot\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}0\\b\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}sa\\tb\end{pmatrix}$$

これと $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ より，$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}sa\\tb\end{pmatrix}$　$\therefore s=\dfrac{x}{a}$，$t=\dfrac{y}{b}$　（$\because a\neq 0$，$b\neq 0$）

よって，条件より，$\dfrac{1}{2}\leq\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\leq 1$，$\dfrac{x}{a}\geq 0$，$\dfrac{y}{b}\geq 0$

ここで，$a>0$，$b>0$ とし，点 P が動く部分を図示すると，次のようになる。



よって，求める面積は四角形 ABB’A’の面積であり，

三角形 OAB と三角形 OA’B’は相似比が 2：1 の三角形だから，

四角形 ABB’A’の面積＝三角形 OAB の面積 － 三角形 OA’B’の面積

$$=S-\left(\frac{1}{2}\right)^2 S$$

$$=\frac{3}{4}S$$

$a<0, b>0$ または $a>0, b<0$ または $a<0, b<0$ として，同様にしても

四角形 ABB’A’の面積$=\dfrac{3}{4}S$

ゆえに，求める面積は$\dfrac{3}{4}S$

(2)

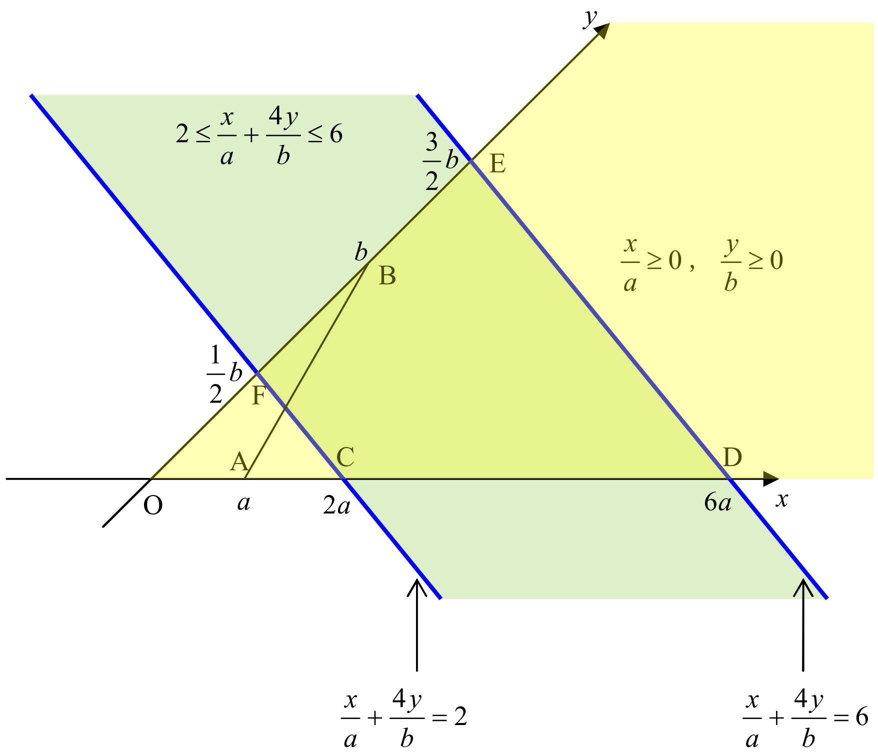
直線 OA を x 軸，直線 OB を y 軸，O を原点，$\mathrm{A}(a,0)$，$\mathrm{B}(0,b)$，$\mathrm{P}(x,y)$とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$=s\cdot\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}0\\b\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}sa\\tb\end{pmatrix}$$

これと$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$より，$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}sa\\tb\end{pmatrix}$　$\therefore s=\dfrac{x}{a}$，$t=\dfrac{y}{b}$（$\because a\neq 0$，$b\neq 0$）

よって，条件より，$2\leq\dfrac{x}{a}+\dfrac{4y}{b}\leq 6$，$\dfrac{x}{a}\geq 0$，$\dfrac{y}{b}\geq 0$

ここで，$a>0$，$b>0$ とし，点 P が動く部分を図示すると，次のようになる。



$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ とすると，

三角形 OCF の面積 $=\dfrac{1}{2}2a\cdot\left(\dfrac{1}{2}b\right)\sin\theta=\dfrac{1}{2}ab\sin\theta$，

三角形 ODE の面積 $=\dfrac{1}{2}\cdot 6a\cdot\left(\dfrac{3}{2}b\right)\sin\theta=\dfrac{9}{2}ab\sin\theta$

より，四角形 CDEF の面積 $=\dfrac{9}{2}ab\sin\theta-\dfrac{1}{2}ab\sin\theta=8\cdot\dfrac{1}{2}ab\sin\theta$

これと，三角形 OAB の面積 $S=\dfrac{1}{2}ab\sin\theta$ より，

四角形 CDEF の面積 $=8S$

$a<0, b>0$ または $a>0, b<0$ または $a<0, b<0$ として，同様にしても

四角形 CDEF の面積 $=8S$

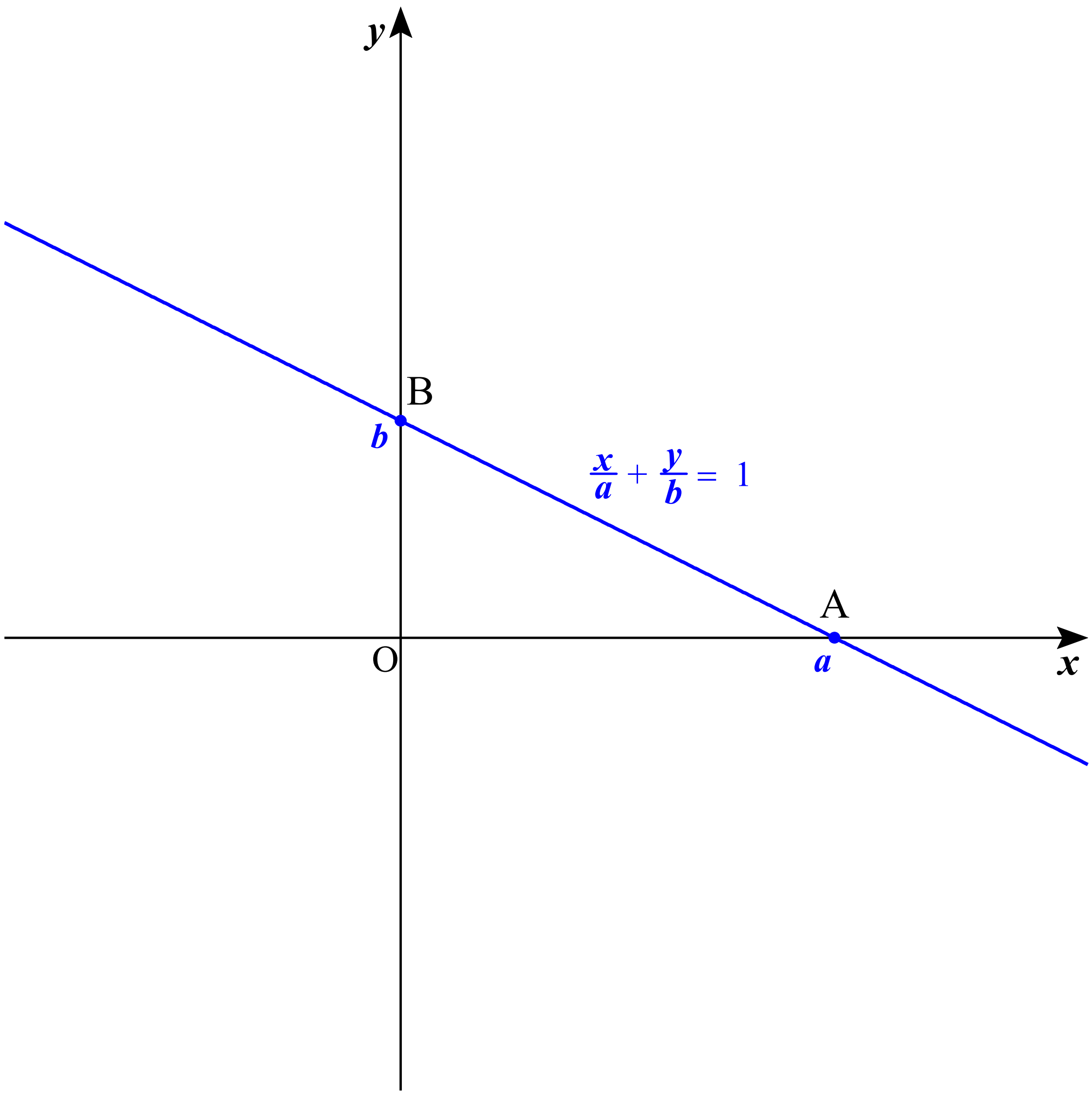
ゆえに，求める面積は $8S$

補足

切片と直線の方程式・平面の方程式

x 切片を a， y 切片を b とする直線の方程式

$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ （a,b は 0 でない実数）

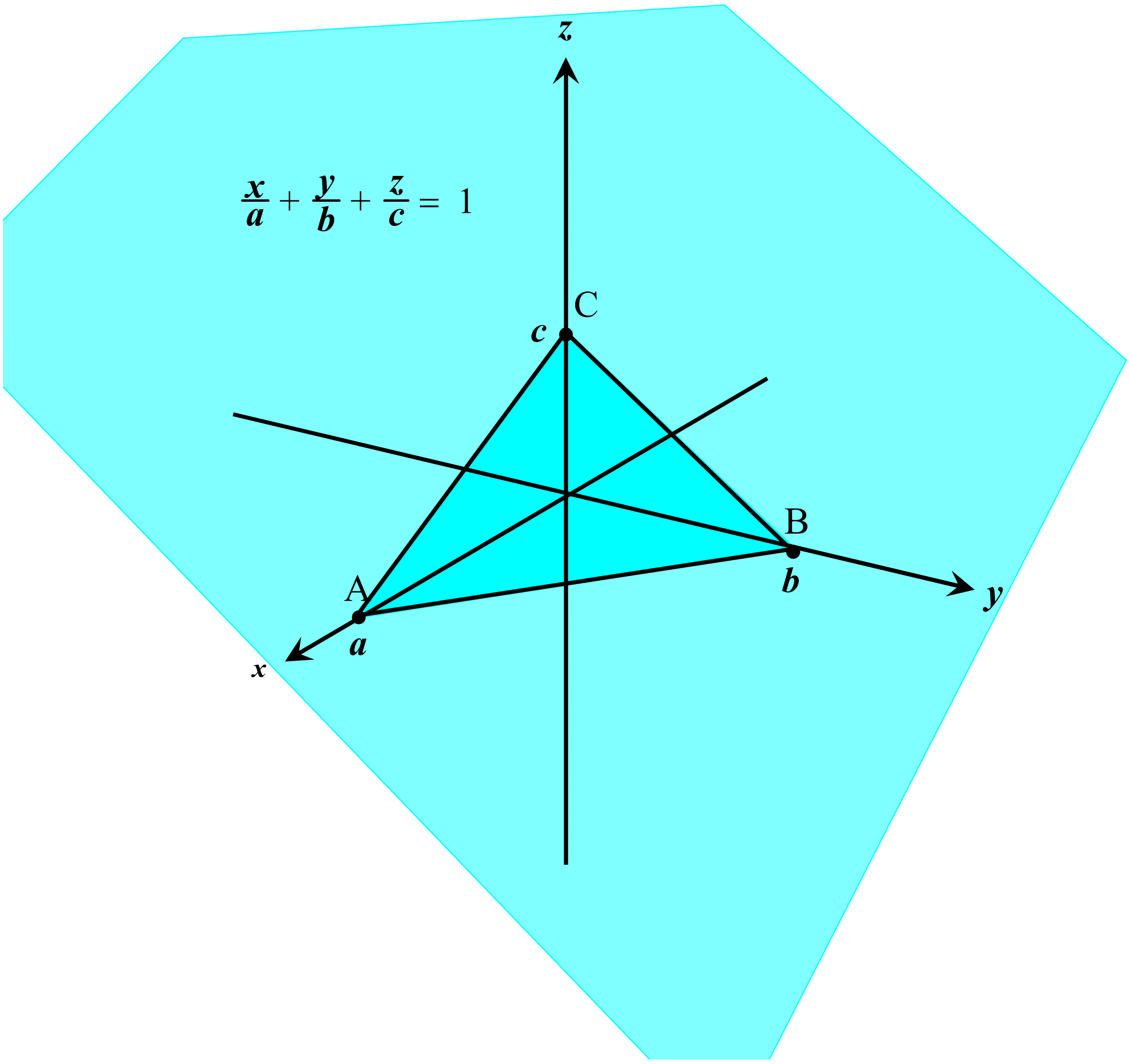


証明

A$(a,0)$，B$(0.b)$を通る直線の方程式は， $y=-\dfrac{b}{a}x+b$ $\quad\therefore \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$

x 切片を a，y 切片を b，z 切片を c とする平面の方程式

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$（$a,b,c$ は 0 でない実数）



証明

$\mathrm{A}(a,0,0)$，$\mathrm{B}(0.b,0)$，$\mathrm{C}(0,0,c)$を通る平面の方程式を $px+qy+rz=s$ とすると，

$pa=qb=rc=s$ より，$p=\frac{s}{a},q=\frac{s}{b},r=\frac{s}{c}$　$\therefore \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

8　内積／垂直（２）

垂線の足のとらえ方

解説補充

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{OY}}\right|\cos\angle\mathrm{XOY}\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{OX}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OX}}\right|}$$
$$=\frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{OY}}\right|\cos\angle\mathrm{XOY}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OX}}\right|}\overrightarrow{\mathrm{OX}}$$
$$=\frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{OY}}\right|\cos\angle\mathrm{XOY}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OX}}\right|}\cdot\frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{OX}}\right|}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OX}}\right|}\overrightarrow{\mathrm{OX}}$$
$$=\frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{OX}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OY}}\right|\cos\angle\mathrm{XOY}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OX}}\right|^2}\overrightarrow{\mathrm{OX}}$$
$$=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OX}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OY}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OX}}\right|^2}\overrightarrow{\mathrm{OX}}$$

参考：シュミットの正規直交化法

正規直交基底

ある空間を作り出す元となるベクトルをその空間の基底という。

とくに基底が互いに直交し合う単位ベクトルの場合，それを正規直交基底という。

つまり，

基底 $\{u_1,u_2,u_3,\cdots,u_n\}$ が正規直交基底ならば，$\begin{cases}\vec{u}_i\cdot\vec{u}_j=1 & (i=j)\\ \vec{u}_i\cdot\vec{u}_j=0 & (i\neq j)\end{cases}$ が成り立つ。

正規直交基底のとり方はいくらでもあり，

たとえば，

xyz 直交座標系の各軸上の単位ベクトル $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ は正規直交基底の 1 つである。

シュミットの正規直交化法

正規直交基底でない基底（たとえば斜交座標系）を正規直交基底に変換する方法にシュミットの正規直交化法というものがある。

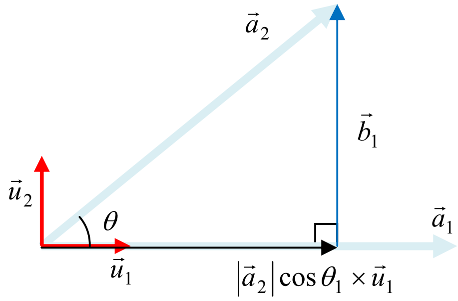
では，この方法を用いて，正規直交基底でない基底，

すなわち「大きさが 1 でない」または「互いに直交しない」基底 $\{\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\cdots,\vec{a}_n\}$ を正規直交基底 $\{u_1,u_2,u_3,\cdots,u_n\}$ に変換してみよう。

手順 1： $\vec{a}_1$ を $\vec{u}_1$ に変換する。

$\vec{u}_1=\dfrac{1}{|\vec{a}_1|}\vec{a}_1$ とするだけでよい。

手順 2： $\vec{a}_2$ を $\vec{u}_2$ に変換する。

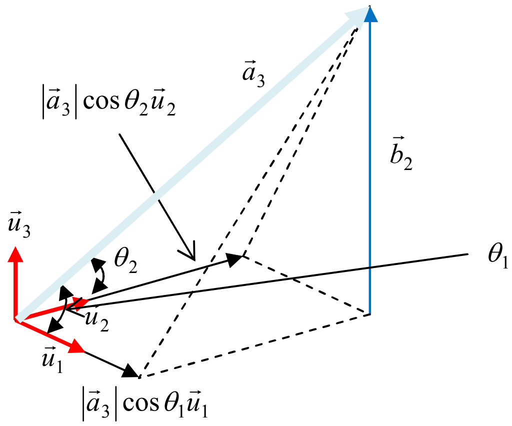


$$
\begin{aligned}
\vec{b}_1&=-|\vec{a}_2|\cos\theta\cdot\vec{u}_1+\vec{a}_2\\
&=-\frac{|\vec{a}_2|\cos\theta}{|\vec{a}_1|}\vec{a}_1+\vec{a}_2\\
&=-\frac{|\vec{a}_2||\vec{a}_1|\cos\theta}{|\vec{a}_1|^2}\vec{a}_1+\vec{a}_2\\
&=-\frac{\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2}{|\vec{a}_1|^2}\vec{a}_1+\vec{a}_2
\end{aligned}
$$

$$\therefore\vec{b}_1=\vec{a}_2-\frac{\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2}{|\vec{a}_1|^2}\vec{a}_1$$

よって，これを $\vec{u}_2=\dfrac{1}{|\vec{b}_1|}\vec{b}_1$ に代入すればよい。

手順 3： $\vec{a}_3$ を $\vec{u}_3$ に変換



$$\vec{b}_2=\vec{a}_3-|\vec{a}_3|\cos\theta_2\cdot\vec{u}_2-|\vec{a}_3|\cos\theta_1\cdot\vec{u}_1$$

よって，これを $\vec{u}_3=\dfrac{1}{|\vec{b}_2|}\vec{b}_2$ に代入すればよい。

$$\vdots$$

$$\vec{b}_{n-1}=\vec{a}_n-|\vec{a}_n|\cos\theta_1\vec{u}_1-|\vec{a}_n|\cos\theta_2\vec{u}_2-\cdots-|\vec{a}_n|\cos\theta_{n-1}\vec{u}_{n-1}\qquad\therefore\vec{u}_n=\frac{1}{|\vec{b}_{n-1}|}\vec{b}_{n-1}$$

9　多角形

$\boxed{ア}$ 別解

三角形 ABD について余弦定理より,

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|^2-2\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|\cos\angle\mathrm{BAD}$$

$$=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

これと $\left|\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|=\left|\vec{b}\right|$ より, $\left|\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$　$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{\left|\vec{a}\right|^2}{2}$

$\left|\vec{a}\right|=1$ より, $\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}$

10　外心

(2) 別解 1

外心は各辺の垂直二等分線の交点だから, 辺 CA の中点を M, 辺 CB の中点を N とすると,

$\overrightarrow{\mathrm{MO}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CA}},\ \overrightarrow{\mathrm{NO}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ より, $\overrightarrow{\mathrm{MO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=0,\ \overrightarrow{\mathrm{NO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}=0$

これと

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{MO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}&=\left(\overrightarrow{\mathrm{CO}}-\overrightarrow{\mathrm{CM}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}\\
&=\left\{\left(a\overrightarrow{\mathrm{CA}}+b\overrightarrow{\mathrm{CB}}\right)-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right\}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}\\
&=\left\{\left(a-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{\mathrm{CA}}+b\overrightarrow{\mathrm{CB}}\right\}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}\\
&=\left(a-\frac{1}{2}\right)\left|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right|^2+b\overrightarrow{\mathrm{CB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}\\
&=\left(a-\frac{1}{2}\right)\left|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right|^2+b\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}\\
&=\left(a-\frac{1}{2}\right)\cdot 2^2+b\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\\
&=4a-\frac{3}{2}b-2
\end{aligned}$$

同様に,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{NO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}&=\left(\overrightarrow{\mathrm{CO}}-\overrightarrow{\mathrm{CN}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}\\
&=\left\{a\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\left(b-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{\mathrm{CB}}\right\}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}\\
&=-\frac{3}{2}a+9b-\frac{9}{2}
\end{aligned}$$

より,

$4a-\dfrac{3}{2}b-2=0$ すなわち $8a-3b=4$ ・・・①

$-\dfrac{3}{2}a+9b-\dfrac{9}{2}=0$ すなわち $3a-18b=-9$ ・・・②

①，②の連立方程式を解くことにより，

$a=\dfrac{11}{15}$，$b=\dfrac{28}{45}$

別解 2

CA の中点を M とすると CA⊥OM より，$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{OM}=0$

これと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{OM}&=\overrightarrow{CA}\cdot\left(\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{CO}\right)\\&=\overrightarrow{CA}\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CO}\right)\\&=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{CA}\right|^2-\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CO}\end{aligned}$$

より，

$$\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{CA}\right|^2-\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CO}=0$$

よって，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CO}&=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{CA}\right|^2\\&=\frac{1}{2}\cdot 2^2\\&=2 \quad ・・・①\end{aligned}$$

また，

$\overrightarrow{CO}=a\overrightarrow{CA}+b\overrightarrow{CB}$ より，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CO}&=\overrightarrow{CA}\left(a\overrightarrow{CA}+b\overrightarrow{CB}\right)\\&=a\left|\overrightarrow{CA}\right|^2+b\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}\\&=a\cdot 2^2+b\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\\&=4a-\frac{3}{2}b \quad ・・・②\end{aligned}$$

①，②より，$4a-\dfrac{3}{2}b=2$ $\therefore 8a-3b=4$ ・・・③

次に，CB の中点を N とすると CB⊥OM より，$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{ON}=0$

これと

$$\overrightarrow{\mathrm{CB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\overrightarrow{\mathrm{CB}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{CN}}-\overrightarrow{\mathrm{CO}}\right)$$
$$=\overrightarrow{\mathrm{CB}}\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{CB}}-\overrightarrow{\mathrm{CO}}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{CB}}\right|^2-\overrightarrow{\mathrm{CB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CO}}$$

より，

$$\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{CB}}\right|^2-\overrightarrow{\mathrm{CB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CO}}=0$$

よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{CB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CO}}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{CB}}\right|^2$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 3^2$$
$$=\frac{9}{2}\quad\cdot\cdot\cdot ④$$

また，

$\overrightarrow{\mathrm{CO}}=a\overrightarrow{\mathrm{CA}}+b\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{CB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CO}}=\overrightarrow{\mathrm{CB}}\left(a\overrightarrow{\mathrm{CA}}+b\overrightarrow{\mathrm{CB}}\right)$$
$$=a\overrightarrow{\mathrm{CB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}+b\left|\overrightarrow{\mathrm{CB}}\right|^2+b\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}$$
$$=a\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+b\cdot 3^2$$
$$=-\frac{3}{2}a+9b\quad\cdot\cdot\cdot ⑤$$

④，⑤より， $-\frac{3}{2}a+9b=\frac{9}{2}$　$\therefore 3a-18b=-9$　・・・⑥

③かつ⑥より， $a=\frac{11}{15}$， $b=\frac{28}{45}$

例題 11　$a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$

(2) 別解

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=t\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=k\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおくと，

$t\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}=k\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ より，　$-\dfrac{t}{k}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{t-1}{k}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$

また，条件より，　$\dfrac{7}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{5}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$

よって，$\begin{cases} -\dfrac{t}{k}=\dfrac{7}{3} \\ \dfrac{t-1}{k}=\dfrac{5}{3} \end{cases}$

これより $k=-\dfrac{1}{4}$　　$\therefore \overrightarrow{\mathrm{OH}}=-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$